

# 剪切带状分叉的力学条件

李国琛

(中国科学院力学研究所)

**提要** 在已论证过的应变软化效应对形成剪切带状分叉的作用的基础上,本文研究了:  
(1)什么受力情况最易激发剪切带(2)采用什么力学模型和参数可以模拟材料中的曲线型带状分叉.

**关键词** 剪切带、分叉、韧性、损伤.

## 一、引言

局部带状分叉是韧性材料损伤的一种主要特征.研究它的形成条件和影响因素,对探索提高材料韧性,控制损伤是有意义的.

宏观的剪切带现象在板材试验中早已被观察过,如 Chakrabarti 和 Spretnak 提出<sup>[1]</sup>:在真应力-应变图上,真应力达到最大值时是萌生局部化变形的条件.对于受有全压的材料,在临近破损时还会出现曲线型的带状分叉<sup>[2,3]</sup>,如图1所示.

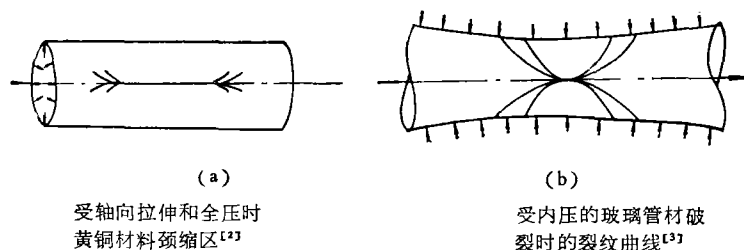


图1 曲线带示意图

此外,材料中还会有更细小的局部变形区,如 Anand 和 Spitzig<sup>[4]</sup>在高强度钢中所见到的带,其宽度仅有  $1\mu\text{m}$  左右,长度也不过  $100\mu\text{m}$  的量级.另一种剪切带是在大空洞之间由小洞( $\sim 1\mu\text{m}$ )所连成,如 Hancock 和 Cowling 的试验<sup>[5]</sup>所见到的.

这许多类型的带的共同特点是带内有较大的局部变形.本文在已论证过的应变软化效应对形成剪切带状分叉的作用的基础上<sup>[6]</sup>,研究了:(1)什么受力情况最易激发剪切带,(2)采用什么力学模型和参数可以模拟材料中的曲线型带状分叉.

## 二、分叉前的应力应变状态与分叉方程

设在连续介质中物质点  $o$  处产生带状分叉。带面的法线方向为  $\mathbf{b}$ , 如图 2 所示。设主应力的状态为:

$$\sigma_1 (= \sigma) \geq \sigma_3 (= \phi \sigma) \geq \sigma_2 (= \beta \sigma) \quad (1)$$

若取分叉前为比例加载, 这样就可以用塑性形变理论给出分叉前的应力-应变关系式

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma}{E} \left[ 1 - \nu(\beta + \phi) + \frac{\phi}{3} (2 - \beta - \phi) \right] = \varepsilon \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma}{E} \left[ \beta - \nu(1 + \phi) + \frac{\phi}{3} (2\beta - 1 - \phi) \right] \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma}{E} \left[ \phi - \nu(1 + \beta) + \frac{\phi}{3} (2\phi - 1 - \beta) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

其中  $E, \nu$  为弹性模量及 Poisson 系数, 又

$$\phi = \frac{3}{2} \frac{E}{E_{se}} - (1 + \nu) \quad (3)$$

$E_{se}$  是等效应力-应变图 ( $\sigma_e - \varepsilon_e$ ) 上的割线模量, 对于幂硬化材料则有

$$\frac{E_{se}}{E} = \left( \frac{\sigma_e / \sigma_Y}{\varepsilon_e / \varepsilon_Y} \right) = \left( \frac{\varepsilon_e}{\varepsilon_Y} \right)^{n-1} \quad (4)$$

其中  $\sigma_Y, \varepsilon_Y$  分别是屈服应力与屈服应变,  $n$  为材料的硬化指数。

根据等效应力的定义可知在一般受力下,

$$\sigma = \sigma_e / [1 - \beta - \phi - \beta\phi + \beta' + \phi']^{1/2} \quad (5)$$

以下将着重分析  $\phi \geq \beta$  的情况, 也就是说由  $\sigma_1$  和  $\sigma_2$  组成最大剪应力。

设有任一几何形状的曲线带状分叉(直线带可作为其特例), 带内相对、带外有速率的挠动

$$\delta V_i = v_i(\mathbf{n}, \mathbf{t}) \quad (6)$$

其中

$$\mathbf{n} \text{ 是带面法线方向 } \mathbf{n} = n_i \mathbf{x}_i \quad (7)$$

$$\mathbf{t} \text{ 是带的切线方向 } \mathbf{t} = t_i \mathbf{x}_i \quad (8)$$

又  $i = 1, 2, 3$ ,

分叉时的平衡性要求名义应力率的挠动在带内满足<sup>[6]</sup>

$$\delta \dot{T}^{ij}|_i = \left[ \frac{D \delta \tau^{ij}}{Dt} - \sigma'^k \delta D_k^i - \sigma'^k \delta D_k^j + \sigma'^k \delta V^j|_k \right]|_i = 0 \quad (9)$$

其中  $|_i$  为协变导数,  $\sigma'^{ik}$  为真应力,

$$\delta D_k^i = \delta D_{jk} g^{ji} = \frac{1}{2} (\delta V_i|_k + \delta V_k|_i) g^{ij}$$

$g^{ij}$  是度量张量;

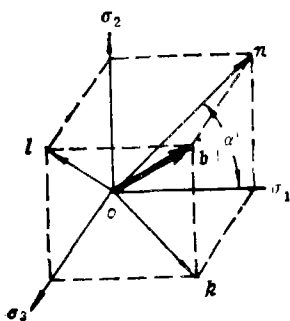


图 2

$\frac{D\delta\tau^{ij}}{Dt}$  是 Kirchhoff 应力挠动的 Jaumann 导数。又由可膨胀的塑性本构方程<sup>[7]</sup>可知,

$$\frac{D\delta\tau^{ij}}{Dt} = L^{ijkl*} \delta D_{kl} \quad (10)$$

其中

$$L^{ijkl*} = \frac{E}{1+\nu} \left[ \frac{1}{2} (g^{ik}g^{jl} + g^{il}g^{jk}) + g^{ij}g^{kl} \frac{\nu - E/3E_{im}^{(P)}}{1-2\nu + E/\bar{E}_{im}^{(P)}} - \frac{3}{2\sigma^2} \frac{S^{ij}S^{kl}}{1+2(1+\nu)E_{ie}^{(P)}/3E} \right]$$

又  $S^{ij}$  为应力偏量; 而  $E_{ie}^{(P)}$ ,  $E_{im}^{(P)}$  分别是等效应力-应变图 ( $\sigma_e - \epsilon_e$ ) 和平均应力-应变图 ( $\sigma_m - \epsilon_m$ ) 上的塑性切线模量, 在各自硬化阶段其值为正而在达到分别软化时各值为负。在刚度张量  $L$  中用 \* 号代表材料性质在伴随速率挠动的分叉时也有转折性的突变。

在以下将研究的各种情况中所用到的求解方法与文献[6]中所述相似, 不再赘述。

### 三、平面应变情况

设带内速率挠动只沿法线方向  $n$  变化而沿  $t$  向不变, 带内的材料性质也如此。在直角坐标下, 令  $n$  与  $x_1$  轴间夹角为  $\alpha$ , 由(6)式可写:

$$\delta V_{i,j} = V'_{ij} n_j, \quad n_1 = \cos \alpha, \quad n_2 = \sin \alpha, \quad n_3 = 0 \quad (11)$$

其中下标逗号是对  $x_i$  的导数, 上标一撇是对  $n$  的一次导数。又令

$$m = n_2/n_1 \quad (12)$$

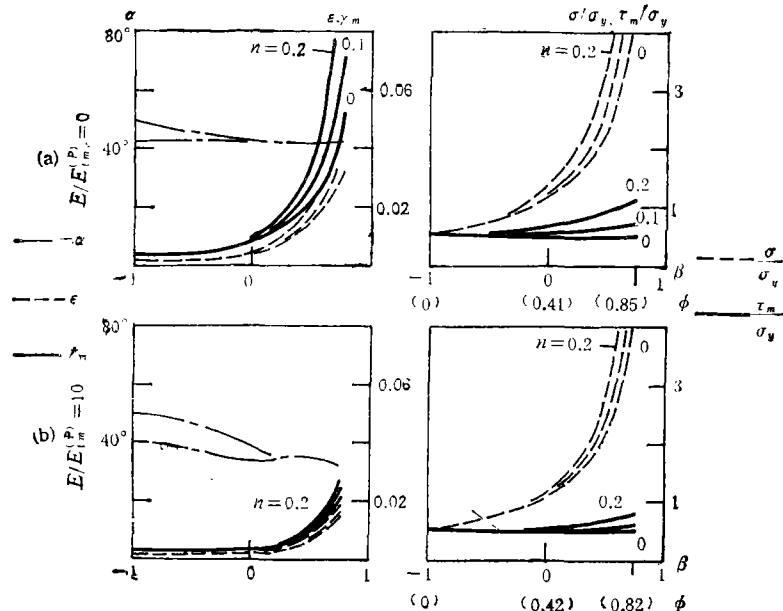


图 3  $E/E_{im}^{(P)} = -100$  时临界应变  $\epsilon$ , 最大剪应变  $\gamma_m$ , 临界应力  $\sigma$ , 最大剪应力  $\tau_m$  和角度  $\alpha$  与  $\beta, \phi$  的关系图(分叉前与分叉时均为平面应变情况,  $\sigma_Y$  是屈服应力)

图 3 绘制了在平面应变条件下承受不同比例加载  $\beta$  而达到分叉时的临界应变  $\varepsilon_1 = \varepsilon$ , 最大剪应变  $\gamma_m = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$ , 临界应力  $\sigma_1 = \sigma$ , 最大剪应力  $\tau_m = (1 - \beta)\sigma/2$ , 带面法线角度  $\alpha$  与  $\sigma_2 (= \beta\sigma)$  和  $\sigma_3 (= \phi\sigma)$  的关系图。其中情况 (a) 为分叉时无塑性体膨胀而 (b) 则有体膨胀。所列出的结果都符合  $\phi \geq \beta$ 。除了  $E/E_c^{(p)} = -100$  的情况还算了  $E/E_c^{(p)} = -1000, -10$  等, 结果与图 3 中所示相似。总起来看:

- (1) 临界的最大剪应力在较大的  $\beta$  范围内变化平缓。
- (2) 在压应变范围内,  $m$  (或  $\alpha$ ) 有两个实根。
- (3) 塑性可膨胀性将进一步降低临界值。

#### 四、轴对称情况

令轴向和径向的速率扰动分别为

$$\delta \dot{V} = V_z(\mathbf{r}), \quad \delta \dot{U} = V_r(\mathbf{r}) \quad (13)$$

$$\text{又} \quad n_z = \cos \alpha, \quad n_r = \sin \alpha, \quad m = n_r/n_z \quad (14)$$

由于在带内的速率扰动沿法向的变化较急剧, 在出现带的径向位置  $r \gg 0$  时将有

$$V_i'' \gg V_i'/r \gg V_i/r^2 \quad (i = z, r).$$

为求渐近近似解可以将低阶项略去。结果表明, 对于很薄的轴对称带状分叉其渐近方程与平面应变时的相似。

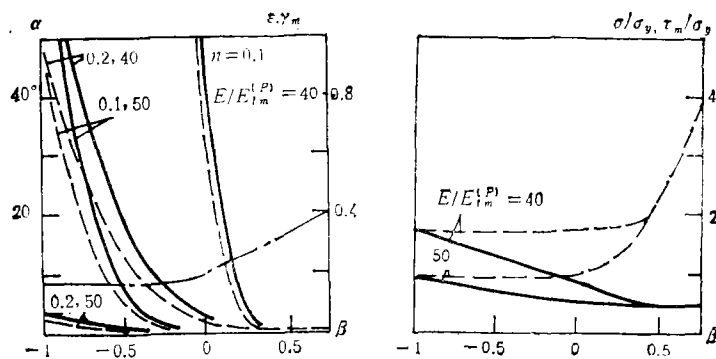


图 4  $E/E_c^{(p)} = -100$  时临界应变  $\varepsilon$ , 最大剪应变  $\gamma_m$ , 临界应力  $\sigma$ , 最大剪应力  $\tau_m$  和角度  $\alpha$  与  $\beta$  的关系图 (分叉前与分叉时均为轴对称情况)

图 4 绘制了轴对称受力情况下出现剪切带时有关临界值与  $\beta$  的关系。实际计算的范围包括了  $E/E_c^{(p)} = -1000, -100, -10, -4$ ; 这里仅以  $E/E_c^{(p)} = -100$  情况为例。总的情况表明, 轴对称情况与平面应变条件相比有较大的不同:

(1) 在通常的软化参数范围内 ( $E/E_c^{(p)} = -1000 \sim -10$ ) 仅在伴随有较大的塑性体膨胀时 ( $E/E_c^{(p)} > 4$ ) 才可能出现带状分叉; 若受有极度损伤时 (例如  $-E/E_c^{(p)} < 10$ ) 则可能在较小的体膨胀下就出现剪切带。

(2) 在所取  $\beta$  范围内  $m$  基本上只有一个根值, 因此  $\alpha$  角度的分布图仅有一条曲线。

## 五、曲线分叉带

在受有全压的情况下,我们看到了曲线型分叉带<sup>[2,3]</sup>。它与直线带的区别在于需要考虑沿带的切线方向  $t$  材料性质的变化。

假定各刚度系数  $L$  沿带的变化率远小于应变率挠动  $\delta D$  沿法线方向  $n$  的变化,于是,例如:

$$(L_{1111}^* \delta D_{11})_{,1} = (L_{1111}^*)_{,1} \delta D_{11} + L_{1111}^* (\delta D_{11})_{,1} \approx L_{1111}^* (\delta D_{11})_{,1}.$$

其他有关各项也可作类似的渐近近似处理。又设速率挠动沿带的法线方向变化远大于沿切线方向的变化,作为渐近近似解可只保留对  $n$  导数的最高阶项。基于这两个假设可以导出与平面应变情况相同的控制方程。只是在曲线带的情况下各刚度系数不再是常数而是沿带方向变化的。

作为近似解还可以将图 5 中的连续曲线分割为用虚线替代的折线。每段折线内部材料性质相同,也即刚度系数相同。若能解出随材料性质的变化而有相应的连续变化的  $\alpha$  角度就可以代表在所给定材料性质变化的曲线带内出现速率挠动分叉。该带的带面是垂直于  $x_1 x_2$  平面的平面应变型的。

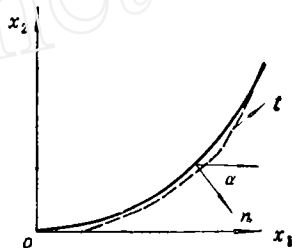


图 5 曲线带

表 1 轴对称受力下的  $\alpha$  角 ( $E/E_{lm}^{(p)} = 0$ ,  $\beta = -1 \sim 0.75$ )

$-E/E_{\sigma}^{(p)}$	0.958	1.25	1.33	1.43	1.67	2.50	3.33	4.00
$\alpha$	90	72	70	68,5	64,14	55,26	49,33	42

表 2 平面应变受力下的  $\alpha$  角 ( $E/E_{lm}^{(p)} = 0$ ,  $\phi \geq \beta$ )

$\beta \backslash -E/E_{\sigma}^{(p)}$	1	1.11	1.25	1.67	2.50	4.00	6.67	10.0
0.75						43	43	43*
0.50						48	45	43*
0		87	79	71,14	64,22	59,28	55,32	52,38
-0.50			83	73,15	66,22	61,28	57,32	54,35
-1.0			85	74,16	67,23	62,28	58,32	55,35

表 1 和表 2 分别列出分叉前为轴对称受力与平面应变受力而分叉时同为平面应变型带面的  $\alpha$  角与  $E/E_{\sigma}^{(p)}$  间的关系。表 1 中的角度值基本上与  $\beta$  值是无关系的。但在平面应变受力时,表 2 的结果表明,  $\beta$  值有明显影响。从两个表中可以明确地看到各自有两组  $\alpha$  值的解;一是由  $90^\circ$  到  $45^\circ$ ,另一组是由  $0^\circ$  到  $45^\circ$ 。除了表 2 中带 \* 号者外,表 1 和表 2 中对应的临界值  $\varepsilon$  均接近于  $\varepsilon_Y$ ,也就是说在多数情况下材料一进入塑性即存在有这种可能性。在小塑性变形下出现剪切带型的破坏应适用于脆性材料。对于韧性材料则只有在大塑性变形时材料的局部损伤才能达到表中所列的软化程度,为此,在试验中仅在韧性损伤的后期才见到曲线带。

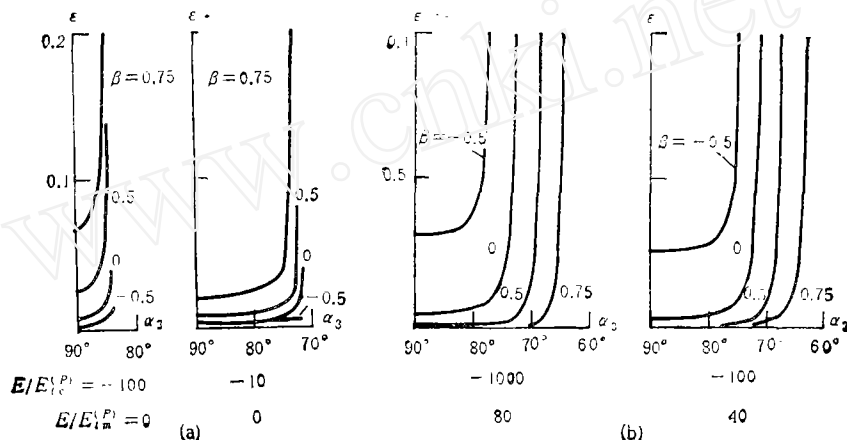
## 六、三维状态的解

以上的解都采取了  $n_3 = \delta V_3 = 0$  的平面应变型分叉。这里将放弃这一限制而研究  $n_3$  值对分叉结果的影响。另外在前文中分叉前的受力状态也限定在平面应变或轴对称的。以下将在  $\phi \geq \beta$  条件下更广泛地了解  $\phi$  值的作用。故而总称为三维状态的解。

设分叉仅在垂直于  $\mathbf{n}$  方向的面内发生, 于是相应 (7) 式将有:

$$\left. \begin{aligned} n_1 &= \cos \alpha_1, \quad n_2 = \cos \alpha_2, \quad n_3 = \cos \alpha_3 \\ n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

且



(a) 平面应变受力

(b) 轴对称受力

图 6 临界应变  $\varepsilon$  与分叉带面的  $\alpha_3$  角的关系 (材料硬化指数  $n = 0.2$ )

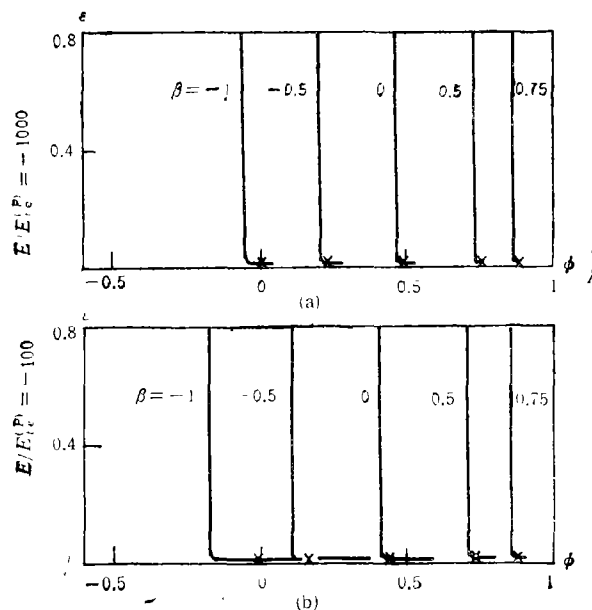


图 7 临界应变  $\varepsilon$  与分叉前受力  $\phi$  值的关系

(X 代表分叉前为平面应变受力, 材料硬化指数  $n = 0.2$  又  $E/E_m^P = 0$ )

其中  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  分别是带面法线与  $x_1, x_2, x_3$  坐标轴的夹角。给定一组  $(n_1, n_2, n_3)$  值就可以求出相应的临界应力/应变。对各组  $(n_1, n_2, n_3)$  的临界值取其最小者即为在给定的某一材料性质分叉条件下的最低临界值。

图 6 展现了  $n_3 \geq 0$  (即  $\alpha_3 \leq 90^\circ$ ) 的临界应变  $\varepsilon$  的分布。分叉前分为 (a) 平面应变受力和 (b) 轴对称受力两种情况。结果表明,  $n_3 = 0$ , 即带面平行于  $x_3$  轴的情况对应了最低临界应变。

图 7 绘制了  $n_3 = 0$  (即分叉面是平面应变型的) 但分叉前受力的  $\phi$  值是变化的情况。对各种  $\beta$  值都有一个很窄的  $\phi$  值范围使临界应变值有个突起。结果表明: (1) 使分叉前受力为平面应变状态的  $\phi$  值都在临界应变曲线的平坦变化区, (2) 存在分叉解的  $\phi$  值范围随分叉软化效应的减弱 (如图 7(a)) 而减小, 反之则加大 (如图 7(b))。

总之, 无论是从分叉前受力状态看还是分叉时的带面角度看, 平面应变状况都是最易激发剪切带的。此外, 除了应变软化效应的加聚会导至存在分叉解的  $\phi$  值范围扩大而外, 图 8 还表明, 塑性可膨胀性将进一步扩大此范围。

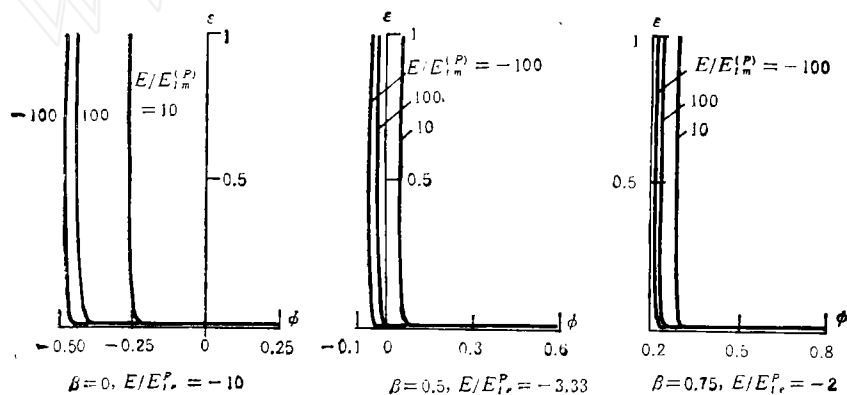


图 8 考虑塑性可膨胀性后 ( $E/E_m^P \neq 0$ ), 分叉解范围扩大图 ( $n = 0.2$ )

## 七、结 论

本研究结果的意义在于说明了:

(1) 平面应变条件, 无论是指分叉前受力还是分叉时的型式, 都是最易于激发剪切带的。因此在轴对称受力时只在极度损伤时才出现剪切带。

(2) 曲线带的出现可以用分叉时沿带切线方向材料损伤程度的不同 (即  $-E/E_m^P$  的连续变化) 来解释。

(3) 本研究仅限于在给定的应变软化和塑性可膨胀参数下提供剪切带型分叉的力学条件。为完备地确定带状分叉还需要从材料角度研究宏观受力状态与微结构损伤的关系, 从而才能确定可以导至应变软化及软化程度等的材料条件。

## 参 考 文 献

- [1] Chakrabarti, A. K., Spretnak, J. W., Metallurgical Trans. A, 6A, (1975), 737—747.

- [2] French, I. E., Weinrich, P. F., *ibid*, **6A**, (1975) 785—790.
- [3] Aoki, S., Sakata, M., *Eng. Fracture Mech.*, **13** (1980), 491—499.
- [4] Anand, L., Spitzig W. A., *J. Mech. Phys. Solids*, **28** (1980), 113—128.
- [5] Hancock, J. W., Cowling, M. J., *Met. Sci*, **14**, (1980), 293—304.
- [6] 李国琛, 力学学报, **19**(1987), 61—68.
- [7] 李国琛, 力学学报, **16**(1984), 580—588.

## THE MECHANICAL CONDITIONS OF SHEAR BAND BIFURCATION

Li Guochen

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

**Abstract** Based on the understanding of the strain-softening effect on the formation of shear band bifurcation discussed previously, this paper investigates: (1) the stressing condition which most favours the occurrence of shear band bifurcation, (2) what are the mechanical model and the governing parameters for simulating the curved band-type bifurcation.

**Key words** ductile, damage, shear band, bifurcation.